$\boxed{\text{Exemple de rédaction}}$ pour le TD sur l'induction – J. M. MADIOT

$a ::= k \mid a_1 + a_2$

$$\frac{}{k \Downarrow k} \qquad \frac{a_1 \Downarrow k_1 \quad a_2 \Downarrow k_2}{a_1 + a_2 \Downarrow k}\ k = k_1 + k_2 \qquad\qquad \frac{a_1 \to a_1'}{a_1 + a_2 \to a_1' + a_2} \qquad \frac{a_2 \to a_2'}{a_1 + a_2 \to a_1 + a_2'} \qquad \frac{}{k_1 + k_2 \to k}\ k = k_1 + k_2$$

On montre que pour toute expression arithmétique a et tout entier k, $a \Downarrow k \iff a \to^* k$, où $\to^*$ est la clôture reflexive transitive de $\to$, qui peut être définie inductivement d'au moins trois manières :

$$\frac{}{a \hookrightarrow a} \quad \frac{a \to b \quad b \hookrightarrow c}{a \hookrightarrow c} \quad \Big\| \quad \frac{}{a \twoheadrightarrow a} \quad \frac{a \twoheadrightarrow b \quad b \twoheadrightarrow c}{a \twoheadrightarrow c} \quad \Big\| \quad \frac{}{a \longmapsto a} \quad \frac{a \to b}{a \longmapsto b} \quad \frac{a \longmapsto b \quad b \longmapsto c}{a \longmapsto c}.$$

1) On montre par induction sur la dérivation de $a \Downarrow k$ que pour tout k, $a \hookrightarrow k$.

- premier cas $a = k$ $\;k \Downarrow k$ on montre $k \hookrightarrow k$, ce qui est évident (première règle de $\hookrightarrow$).
- deuxiem cas $a = a_1 + a_2$ $\;\frac{a_1 \Downarrow k_1 \quad a_2 \Downarrow k_2}{a_1 + a_2 \Downarrow k}$ avec $k = k_1 + k_2$.

  Par hypothèses d'induction $a_1 \hookrightarrow k_1$ et $a_2 \hookrightarrow k_2$, et on veut montrer $a_1 + a_2 \hookrightarrow k$.

  Par le Lemme 1 ci dessous on a $a_1 + a_2 \hookrightarrow k_1 + a_2 \hookrightarrow k_1 + k_2$ et on peut montrer que $k_1 + k_2 \hookrightarrow k$ par le Lemme 2. On conclut par transitivité (Lemme 3) pour obtenir enfin $a_1 + a_2 \hookrightarrow k$, cqfd. □

Lemme 1 si $a \hookrightarrow c$ alors $a + d \hookrightarrow c + d$ (et $d + a \hookrightarrow d + c$).

Preuve par induction sur la dérivation de $a \hookrightarrow c$:

- premier cas $c = a$, montrons que $a + d \hookrightarrow a + d$ (et $d + a \hookrightarrow d + a$), ce qui est évident (1ere règle).
- deuxième cas $\frac{a \to b \quad b \hookrightarrow c}{a \hookrightarrow c}$, par I.H. on a $b + d \hookrightarrow c + d$ (et $d + b \hookrightarrow d + c$). On applique la première (deuxième) règle de $\to$ pour obtenir $a + d \to b + d$ car $a \to b$. On applique ensuite la deuxième règle de $\hookrightarrow$ pour obtenir enfin $a + d \hookrightarrow c + d$: $\frac{\frac{a \to b}{a + d \to b + d} \quad \overset{(I.H)}{b + d \hookrightarrow c + d}}{a + d \hookrightarrow c + d}$

  et symétriquement pour $d + a \hookrightarrow d + c$. □

Lemme 2 $k_1 + k_2 \hookrightarrow k$ si $k = k_1 + k_2$.

Preuve immédiate : $\frac{\overline{k_1 + k_2 \to k}^{\,k = k_1 + k_2} \quad \overline{k \hookrightarrow k}}{k_1 + k_2 \hookrightarrow k}$. □

Lemme 3 $\hookrightarrow$ est transitive.

Preuve Montrons par induction sur la dérivation de $a \hookrightarrow c$ que $c \hookrightarrow d$ implique $a \hookrightarrow d$.

- premier cas : $a = c$ $\;a \hookrightarrow d$ implique trivialement $a \hookrightarrow d$.
- deuxieme cas : $\frac{a \to b \quad b \hookrightarrow c}{a \hookrightarrow c}$ par induction si $c \hookrightarrow d$ alors $b \hookrightarrow d$. Comme $a \to b$ on a bien $\frac{a \to b \quad \overset{(I.H)}{b \hookrightarrow d}}{a \hookrightarrow d}$. □

2) et 3) Pour montrer $a \Downarrow k \Rightarrow a \twoheadrightarrow k$ et $a \Downarrow k \Rightarrow a \mapsto k$ il suffit de montrer les Lemmes 1, 2, 3 pour $\twoheadrightarrow$ et $\mapsto$ ce qui se déroule sensiblement de la même manière, sauf pour le Lemme 3 qui est trivial pour $\mapsto$. (Rédaction laissée en exercice.)

4) Montrons que $a \hookrightarrow k$ implique $a \Downarrow k$, par induction sur la dérivation de $a \hookrightarrow k$.

- premier cas $a = k$: trivialement (première règle) $k \Downarrow k$.
- deuxième cas: ~~$a = a_1 + a_2$~~ $\dfrac{a \twoheadrightarrow b \quad b \hookrightarrow k}{a \hookrightarrow k}$ par chance l'hypothèse d'induction est valide pour $b \hookrightarrow k$ car k est bien un entier. On a donc bien $b \Downarrow k$. On n'a plus qu'à prouver :

Lemme 4 si $a \twoheadrightarrow b$ alors pour tout k, $b \Downarrow k \Rightarrow a \Downarrow k$.

Preuve par induction sur la dérivation de $a \twoheadrightarrow b$.

- premier cas $a = a_1 + a_2$, $b = a_1' + a_2$ $\dfrac{a_1 \to a_1'}{a_1 + a_2 \to a_1' + a_2}$ et par H.I. pour tout k_1 $a_1' \Downarrow k_1 \Rightarrow a_1 \Downarrow k_1$.

  On prouve que $a_1' + a_2 \Downarrow k \Rightarrow a_1 + a_2 \Downarrow k$, supposons donc $a_1' + a_2 \Downarrow k$, ce qui veut dire que $k = k_1' + k_2$ et $a_1' \Downarrow k_1'$ et $a_2 \Downarrow k_2$. Par H.I on a $a_1 \Downarrow k_1'$ et finalement on a bien $\dfrac{a_1 \Downarrow k_1' \quad a_2 \Downarrow k_2}{a_1 + a_2 \Downarrow k}\ k = k_1' + k_2$.
- deuxième cas similaire en utilisant l'I.H sur $a_2' \Downarrow k_2'$.
- troisième cas: on montre que ~~[illegible]~~ $\dfrac{}{k_1 + k_2 \Downarrow k'}\ k' = k_1 + k_2$ et $k' \Downarrow k$ impliquent $k_1 + k_2 \Downarrow k$. Comme $k' \Downarrow k$ on sait que $k' = k$ et $k_1 \Downarrow k_1$ et $k_2 \Downarrow k_2$ donc $\dfrac{k_1 \Downarrow k_1 \quad k_2 \Downarrow k_2}{k_1 + k_2 \Downarrow k}\ k = k_1 + k_2$. □

Le Lemme 4 nous permet de montrer $b \Downarrow k \Rightarrow a \Downarrow k$ et donc enfin, on a bien $a \Downarrow k$. □

5) Pour montrer que $a \twoheadrightarrow k \Rightarrow a \Downarrow k$ une induction sur $a \twoheadrightarrow k$ ne suffit pas car elle ne s'applique pas (on a $a \twoheadrightarrow b$ et $b \to k$ ce qui n'autorise pas l'induction sur $a \twoheadrightarrow b$). On généralise alors pour montrer que $a \twoheadrightarrow b \Rightarrow (\forall k\ b \Downarrow k \Rightarrow a \Downarrow k)$ ce qui se prouve par induction sur $a \twoheadrightarrow b$ en utilisant le Lemme 4.

Pour $a \mapsto k \Rightarrow a \Downarrow k$, même principe. (Rédaction laissée en exercice.)