TD 2 : Réécriture

1 Clôtures

Soit X un ensemble quelconque, et considérons $\mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur X (aussi appelées ici *réductions*). On notera par $\to$ les éléments de $\mathcal{P}(X^2)$ et par $x \to y$ l'appartenance du couple (x, y) à la relation $\to$. Soit $\to$ une relation, on note :

$\to^n$ la composition de $\to$ n fois ;
$\to^+$ sa clôture transitive ;
$\to^\star$ sa clôture réflexive transitive ;

La réduction $\to$ est dite :

- *terminante* s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \to x_{i+1}$;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément x tel que $x \to^+ x$;
- *à branchement fini* si pour tout x l'ensemble $\{y \mid x \to y\}$ est fini ;
- *globalement finie* si pour tout x l'ensemble $\{y \mid x \to^+ y\}$ est fini ;
- *bornée* si pour tout x il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de y tel que $x \to^{n_x} y$.

Question 1.1. a) Une relation bornée est-elle terminante ?

b) Une relation globalement finie est-elle bornée ? Est-elle terminante ?

c) On suppose que $\to$ et $\to^*$ sont à branchement fini. $\to$ est-elle terminante ?

d) On suppose $\to$ acyclique et $\to^*$ à branchement fini. $\to$ est-elle terminante ?

2 Principe d'induction bien fondée, Knaster-Tarski

Question 2.1. Prouver par une induction bien fondée que tout entier strictement positif admet une factorisation en nombres premiers.

Question 2.2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ainsi :

$$g(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a = b \\ g(a - b, b) & \text{si } a > b \\ g(a, b - a) & \text{si } a < b \end{cases}$$

Montrez par induction bien fondée sur une relation astucieuse que $g(a, b)$ divise toujours a et b.

On reprend les notations adoptées en cours pour la définition d'ensembles par induction. On se donne ainsi des ensembles pré-existants $B_1, \dots, B_m$, et k constructeurs $c_1, \dots, c_k$. Chaque c_i a un nombre fini d'arguments, notés $a^i_1, \dots, a^i_{n_i}$. Chaque a^i_j est

- soit un élément de l'un des B_j,
- soit `rec`.

Comme vu en cours, les c_i déterminent un opérateur f sur les parties d'un ensemble "ambiant" S, qui à son tour, par application du théorème de Knaster-Tarski, détermine un ensemble défini inductivement, plus petit pré-point fixe de f. Appelons cet ensemble E. On définit une relation $\to$ entre éléments de E comme suit :

Pour $(x, y) \in E^2$, $x \to y$ ssi pour un certain i, $x = c_i(\dots, y, \dots)$.

Question 2.3. a) Montrer que $\to$ est une relation terminante.

b) Établir un lien entre le principe de preuve par induction sur E donné par le théorème de Knaster-Tarski et le principe d'induction bien fondée.

c) Montrer que $\to^+$, la clôture transitive de $\to$, est une relation terminante. À quoi correspond le principe d'induction bien fondée dans ce cas ?

3 Plongement d'un ordre dans $(\mathbb{N}, >)$

Question 3.1. Montrer le lemme suivant :
Une réduction à branchement fini termine ssi il existe un plongement[1] *dans* $(\mathbb{N}, >)$.

Question 3.2. a) Montrer que la restriction aux réductions à branchement fini est nécessaire en analysant l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$(i + 1, j) \to (i, k)$
$(i, j + 1) \to (i, j)$

b) Que pensez-vous de l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?
$(i + 1, j) \to (i, j)$
$(i, j + 1) \to (i, j)$

Question 3.3. On suppose $\to_1$ et $\to_2$ terminantes. La relation suivante est-elle terminante ?

$$\to_{1\cup2} \triangleq \{(x, y) \mid x \to_1 y \vee x \to_2 y\}$$

1. Ici un plongement est une fonction f telle que $x > y$ implique $f(x) > f(y)$ (on utilise ainsi le fait que $>$ est terminante sur $\mathbb{N}$)