TD 3 : Réécriture

1 Ordre lexicographique

Soit A et B deux ensembles, $\geq_A$ une relation d'ordre sur A, $\geq_B$ une relation d'ordre sur B, et $>_A$ et $>_B$ les ordres stricts correspondants.

Question 1.1. Rappeler la définition de l'ordre lexicographique $>_{A\times B}$ associé à $>_A$ et $>_B$.

Question 1.2. On donne la définition suivante :

$$(x,y) \geq_{A\times B} (x',y') \overset{\triangle}{\iff} (x >_A x') \vee (x = x' \wedge y \geq_B y') \ .$$

Vérifier que $\geq_{A\times B}$ est la clôture réflexive de $>_{A\times B}$ et qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

2 Ordre multiensemble

Question 2.1. Soit $(X, >)$, un ensemble ordonné. Rappeler la définition de $>_{mul}$ extension de $>$ sur les multiensembles à support fini d'éléments de X.

Question 2.2. Donner une définition plus simple quand $>$ est total.

Question 2.3. Prouver que $>$ est strict implique $>_{mul}$ est strict aussi.

3 Terminaison

Question 3.1. Montrer que l'évaluation de la fonction suivante termine pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} ack(0,n) &\to n+1 \\ ack(m+1,0) &\to ack(m,1)) \\ ack(m+1,n+1) &\to ack(m, ack(m+1,n)) \end{aligned}$$

Question 3.2. Le système de réécriture de mots suivant termine-t'il ?

$$ab \to bb \qquad\qquad ba \to aa$$

4 Le problème du mot

Soient Σ un alphabet et $\Sigma^\star$ un ensemble de mots sur Σ. Étant donnée une relation $\to$ sur $\Sigma^\star$, on note par $\overset{\star}{\leftrightarrow}$ la clôture réflexive et transitive de $\leftrightarrow \; := \; \to \cup \leftarrow$. Le *problème du mot* pour $\to$ peut être formulé comme suit :

étant donnés deux mots $u, v \in \Sigma^\star$, est-ce que $u \overset{\star}{\leftrightarrow} v$?

Intuitivement, décider le problème du mot revient à déterminer si u et v sont le même mot modulo $\overset{\star}{\leftrightarrow}$. Le problème du mot – qui est indécidable en général – est une motivation importante pour la théorie des systèmes de réécriture.

L'existence de formes normales uniques joue un rôle central pour résoudre "facilement" le problème du mot. Deux mots u_1 et u_2 ont la même forme normale s'il existe un mot $w \in \Sigma^\star$ tel que :

$$u_1 \overset{\star}{\to} w \overset{\star}{\leftarrow} u_2 \ .$$

Dans ce cas on dit que u_1 et u_2 sont *joignables* (notation $u_1 \downarrow u_2$). On dit que la relation $\to$ a la *propriété de Church-Rosser* si :

$$u_1 \overset{\star}{\leftrightarrow} u_2 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \downarrow u_2.$$

Intuitivement, si la relation $\to$ a la propriété de Church-Rosser, alors le problème du mot se réduit à établir si deux mots sont joignables.

Question 4.1. Rappeler la définition de $\to$ est confluente. Montrer que $\to$ est confluente si et seulement si elle admet la propriété de Church-Rosser [1].

Soient $\to$ une relation confluente et u_1, u_2 deux mots tels que $u_1 \overset{\star}{\leftrightarrow} u_2$.

Question 4.2. Montrer que si u_2 est en forme normale, alors $u_1 \overset{\star}{\to} u_2$.

Question 4.3. Montrer que si u_1 et u_2 sont en forme normale, alors $u_1 = u_2$.

5 Réécriture abstraite : faible normalisation

Soit $(E, \to)$ un système de réécriture abstraite. On dit que $e \in E$ est *fortement normalisant* si toutes les réductions issues de e terminent. e est *faiblement normalisant* s'il peut être réécrit en un nombre fini d'étapes en une forme normale (fortement normalisant implique donc faiblement normalisant, mais pas le contraire). On dit que le système de réécriture $(E, \to)$ est fortement normalisant s'il l'est pour tout $e \in E$, et de même pour la propriété de faible normalisation.

Question 5.1. Donner un exemple de système de réécriture abstraite qui soit confluent, faiblement normalisant, et non fortement normalisant.

Question 5.2 (plus difficile)**.** Le lemme de Newman dit que la forte normalisation et la confluence locale impliquent la confluence globale. On s'intéresse ici à une variante de ce résultat, où l'on exploite la faible normalisation.

On suppose que $(E, \to)$ est localement confluent et faiblement normalisant. On suppose de plus qu'il existe une fonction $\mu\colon E \to \mathbb{N}$ telle que pour tous a, b, dès que $a \to b$, on a $\mu(a) < \mu(b)$ (notez que si c'était $\mu(a) > \mu(b)$ on aurait la forte normalisation).

On se donne $a \in E$. Montrer que a est fortement normalisant.

1. Attention : à cause de cette équivalence, il existe quelques variations dans les définitions rencontrées dans la littérature (e.g. la propriété de Church-Rosser est parfois définie par notre définition de la notion de confluence, et vice-versa).