TD 4 : Réécriture : confluence, ordre de réduction

1 Confluence

On note par $\overset{\star}{\leftrightarrow}$ la clôture réflexive et transitive de $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$.

Question 1.1 (Rappel[1])**.** Montrer que $\overset{\star}{\leftrightarrow} \subseteq \overset{\star}{\rightarrow}\overset{\star}{\leftarrow}$ ssi $\overset{\star}{\leftarrow}\overset{\star}{\rightarrow} \subseteq \overset{\star}{\rightarrow}\overset{\star}{\leftarrow}$.

Question 1.2 (Facile)**.** Soient $\rightarrow$ une relation confluente et u_1, u_2 deux mots tels que $u_1 \overset{\star}{\leftrightarrow} u_2$.

a) Montrer que si u_2 est en forme normale (c'est à dire $u_2 \not\rightarrow$), alors $u_1 \overset{\star}{\rightarrow} u_2$.

b) Montrer que si u_1 et u_2 sont en forme normale, alors $u_1 = u_2$.

Question 1.3 (Facile)**.** Donner un exemple de système de réécriture abstraite qui soit confluent, faiblement normalisant, et non fortement normalisant.

On écrit :

— $SN(a)$ (a est *fortement normalisant*) si $a \not\rightarrow^{\omega}$ (pas de chaîne infinie partant de a)

— $WN(a)$ (a est *faiblement normalisant*) si $a \overset{\star}{\rightarrow}\not\rightarrow$

— $CR(a)$ (confluence en a) si $b \overset{\star}{\leftarrow} a \overset{\star}{\rightarrow} c$ implique $b \overset{\star}{\rightarrow}\overset{\star}{\leftarrow} c$ pour tous b, c.

Le lemme de Newman dit que la forte normalisation et la confluence locale impliquent la confluence globale. On rappelle qu'il marche aussi point par point :

Lemma 1. Si $\rightarrow$ est localement confluente, alors pour tout a, $SN(a)$ implique $CR(a)$.

Ce raffinement est nécessaire pour montrer une variante du lemme, où l'on exploite la faible normalisation :

Question 1.4. On suppose $\rightarrow$ localement confluente et une fonction $\mu\colon E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tous a, b, dès que $a \rightarrow b$, on a $\mu(a) < \mu(b)$. Montrer que $WN(a)$ implique $SN(a)$ (et donc $CR(a)$).

(Indice : on montrera par induction sur k que si $\mu(n) - \mu(a) < k$ et $a \overset{\star}{\rightarrow} n \not\rightarrow$ alors $SN(a)$ en utilisant Newman, et on fera attention à ne pas conclure trop vite.)

2 Ordres de réécriture

On travaille maintenant sur des systèmes de réécriture de termes. Une relation $>$ est un *ordre de réécriture* si :

- c'est un ordre strict (transitif, irréflexif),
- qui est *compatible* : si $u > v$ alors

$$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n) > f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)$$

- qui est *clos par substitution* : si $u > v$ alors pour toute substitution σ, $\sigma(u) > \sigma(v)$.

Un *ordre de réduction* est un ordre de réécriture terminant.

1. C'est la même question que pendant la dernière séance, c'est à dire "une relation est confluente ssi elle admet la propriété de Church-Rosser"

Question 2.1. Montrer qu'un système de réécriture R termine ssi il existe un ordre de réduction $>$ tel que pour toute règle $l \to r$ de R, on a $l > r$.

Pour un terme s et une variable x, on note $|s|$ la taille du terme et $|s|_x$ le nombre d'apparitions de x dans s.

Question 2.2. Est-ce que la relation $>$ sur $T(\Sigma, X)$ définie ci-dessous est un ordre de réduction ?

$$s > t \text{ ssi } |s| > |t|$$

Question 2.3. Montrer que la relation $>^\bullet$ sur $T(\Sigma, X)$ définie ci-dessous est un ordre de réduction.

$$s >^\bullet t \text{ ssi } |s| > |t| \text{ et } \forall x \in X, |s|_x \geq |t|_x$$

Question 2.4. Justifier ou infirmer la terminaison des systèmes de réécriture suivants :

1. $f(f(x,x),y) \to f(y,y)$
2. $p(s(i),j) \to p(i,j) \quad ; \quad p(i,s(j)) \to p(i,j)$

3 Interprétations polynomiales

Quand on manipule l'ordre $>^\bullet$ ci-dessus, on comprend qu'il faut donner une place importante aux variables. Malheureusement, $>^\bullet$ ne s'applique pas toujours, par exemple pour les exemples qui suivent. On développe dans cette section les *interprétations polynomiales* pour construire des ordres de réduction plus puissants.

On interprète chaque symbole par un polynôme multivarié (avec autant de monômes que l'arité du symbole) à coefficients strictement positifs, par exemple pour $\Sigma = \{z^0, s^1, d^1\}$ on peut dire $[\![z]\!] = 1$ pour la constante, $[\![s]\!](X) = X + 1$ et $[\![d]\!](X) = 3X$. Considérons le système suivant :

$$d(s(x)) \to s(s(d(x))) \qquad\qquad d(z) \to z$$

(par exemple, $d(s(s(z))) \xrightarrow{\star} s(s(s(s(z))))$ d'interprétations respectives 9 et 5). On dit que $t > t'$ si le polynôme $[\![t]\!]$ est strictement plus grand que le polynôme $[\![t']\!]$ en toute valuation dans $\mathbb{N}^\star$, ce qu'on écrit $[\![t]\!] >_{\mathbb{N}^\star} [\![t']\!]$.

Question 3.1 (Facile)**.** Montrer que $>_{\mathbb{N}^\star}$ est terminante. En déduire que $\to$ termine.

Dans un cas plus général, soit $\to$ un système de réécriture de termes.

Question 3.2. Interprétons chaque symbole par un polynôme et chaque terme par le polynôme induit, et considérons l'ordre $t > t'$ définit par $[\![t]\!] >_A [\![t']\!]$ pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$. Quelles conditions doit on imposer pour que $>$ soit un ordre de réduction ?

Question 3.3. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il termine ou non :

$$(a)\left\{\begin{array}{c} x + 0 \to x \\ x + S(y) \to S(x+y) \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{c} x + 0 \to x \\ x + S(y) \to S(x+y) \\ x \times 0 \to 0 \\ x \times S(y) \to (x \times y) + x \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{c} \neg\neg x \to x \\ \neg(x \wedge y) \to (\neg x) \vee (\neg y) \\ \neg(x \vee y) \to (\neg x) \wedge (\neg y) \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{c} f(f(x,y),z) \to f(x, f(y,z)) \\ f(x, f(y,z)) \to f(y,y) \end{array}\right.$$

$$(e)\left\{\begin{array}{c} or(x,y) \to x \\ or(x,y) \to y \\ f(a,b,x) \to f(x,x,x) \end{array}\right.$$

4 Paires critiques

On suppose que $\to$ est un système de réécriture de termes terminant. On voudrait caractériser la confluence en regardant les interférences entre les règles.

Question 4.1. Quelle condition implique la confluence, tout en étant plus facile à vérifier ?

Supposons que $u \to v$ et $u \to w$. On suppose que v est obtenu avec la règle $l_1 \to r_1$ et w avec $l_2 \to r_2$.

Question 4.2. Exprimer u et v en fonction de l_1 et r_1.

Parfois, il est trivial de voir que pour un certain z, $v \xrightarrow{\star} z$ et et $w \xrightarrow{\star} z$. On cherche et élimine ces cas, pour se ramener progressivement à un problème plus précis et plus intéressant.

Question 4.3. Donner une condition de “non-chevauchement” rendant le problème trivial.

On sait maintenant que les règles doivent se chevaucher (soit en quelque sorte s'inclure l'une l'autre).

Question 4.4. Donner une condition d'inclusion triviale reliée aux variables.

On sait maintenant que les règles doivent se chevaucher d'une manière non triviale.

Question 4.5. Donner une condition de “contextes communs” qu'on peut éliminer pour se ramener à un cas plus petit.

Question 4.6. Dans les différentes expressions de u en fonction de l_1 et l_2 il y a des substitutions. Donner une condition de minimalité sur ces substitutions.

Question 4.7. Vérifier qu'on obtient la définition suivante des “paires critiques” (les paires qu'il suffit de montrer joignables pour montrer la confluence locale) :

Supposons que $l_1 \to r_1$ et $l_2 \to r_2$ sont deux instances de règles de réécriture sans variables communes. Soit p une position de l_1 tels que $l_1|p$ n'est pas une variable et $l_1|p$ et l_2 sont unifiables. Soit σ l'unificateur le plus général de $l_1|p$ et l_2. Alors (v, w) où $v = \sigma(r_1)$ et $w = \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]|p$ est une *paire critique.*

Question 4.8 (Théorème des paires critiques)**.** Montrer que si toutes les paires critiques sont joignables, le système est localement confluent.