TD 2 : Curry-Howard propositionnel

jean-marie.madiot@ens-lyon.org

1 Déduction naturelle et Curry-Howard

Exercice 1

Prouver en déduction naturelle les théorèmes suivants ou donner directement un λ-terme de ce type.
Vérifier (par exemple avec Coq) sur quelques cas que l'arbre de typage du λ-terme correspond à la dérivation dans NJ.

1. $P \to \neg\neg P$,
2. $P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
3. $(P \to \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$,
4. $(P \to Q) \to \neg Q \to \neg P$,
5. $(P \to Q) \to (P \to \neg Q) \to \neg P$,
6. $((P \vee Q) \to R) \to (P \to R) \wedge (Q \to R)$,
7. $(P \to R) \vee (Q \to R) \to P \wedge Q \to R$,
8. $(P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$.

En supposant à présent le principe du tiers exclu pour P, faire de même pour

9. $(P \wedge Q \to R) \to (P \to R) \vee (Q \to R)$,
10. $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$,
11. $(P \to P \wedge Q) \vee (Q \to P \wedge Q)$.

2 Échauffement pour le théorème de Glivenko

Exercice 2

Montrer les théorèmes suivants en déduction naturelle intuitionniste :

Double_neg $P \to \neg\neg P$

Ex_middle $\neg\neg(P \vee \neg P)$,

And_intro $\neg\neg P \to \neg\neg Q \to \neg\neg(P \wedge Q)$,

And_elim $\neg\neg(P \wedge Q) \to \neg\neg P$,

Or_intro $\neg\neg P \to \neg\neg(P \vee Q)$,

Or_elim $\neg\neg(P \vee Q) \to \neg\neg(P \to R) \to \neg\neg(Q \to R) \to \neg\neg R$.

Imp_intro $(P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$,

Imp_elim $\neg\neg(P \to Q) \to \neg\neg P \to \neg\neg Q$,

3 Réduction du sujet en λ-calcul

Exercice 3
On veut montrer que le λ-calcul simplement typé admet la propriété de réduction du sujet :

$$\text{Si } \Gamma \vdash M : T \text{ et si } M \to_\beta M', \text{ alors } \Gamma \vdash M' : T.$$

1. Montrer le *lemme d'affaiblissement* :
$$\text{Si } \Gamma \vdash M : T, \text{ alors } \Gamma, x : T' \vdash M : T.$$
2. Montrer le *lemme de substitution* :
$$\text{Si } \Gamma, x : T' \vdash M : T \text{ et si } \Gamma \vdash N : T', \text{ alors } \Gamma \vdash M[N/x] : T.$$
3. Montrer le *lemme d'inversion* :
$$\text{Si } \Gamma \vdash \lambda x.M : T, \text{ alors } T \text{ est de la forme } T' \to T'' \text{ et } \Gamma, x : T' \vdash M : T''.$$
4. Conclure.

4 Théorème de Glivenko

Théorème ***Glivenko***
Si un énoncé F est prouvable en logique propositionnelle classique,
alors $\neg\neg F$ est prouvable en logique propositionnelle intuitionniste.

Exercice 4 ***Théorème de Glivenko***
Démontrer (sur papier) le théorème de Glivenko.

5 Devoir maison

Vous devez rendre pour le 8 octobre l'un des deux DM ci-dessous. Ils sont à faire en binôme.

Devoir à la maison ***Preuve complète de réduction du sujet***
Rédiger complètement et en détail la preuve de réduction du sujet du λ-calcul simplement typé (avec les trois lemmes).

Devoir à la maison ***Théorème de Glivenko en Coq***
Formaliser une preuve complète du théorème de Glivenko en Coq.
Pour cela, il faudra commencer par formaliser les systèmes de preuves NJ et NK.