

TD 9 : Calcul des séquents

jeanmarie.madiot@ens-lyon.fr

Voici les règles du calcul des séquents LK₀ (le « 0 » exprime qu'on ne s'intéresse qu'au fragment propositionnel).

Le groupe identité:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut}$$

Le groupe structurel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W_g \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C_g \quad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} W_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} C_d \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} E_d$$

Le groupe logique:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_g^1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_g^2 \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_d^1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_d^2$$

$$\frac{\Gamma_1, B \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \rightarrow_g \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow_d \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg_d$$

Exercice 1

Prouver les théorèmes suivants dans LK₀.

1. $\neg\neg P \rightarrow P$,
2. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$,
3. $(P \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow \neg\neg(P \rightarrow Q)$,
4. $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
5. $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$,
6. $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow P \rightarrow R$.

Exercice 2 *Traduction de la déduction naturelle en calcul des séquents*

1. Rappeler les règles de la déduction naturelle propositionnelle intuitionniste.
2. Montrer que toute règle de NJ_0 est admissible dans $LJ_0 + (\text{Cut})$.
3. Comment supprimer la règle (Cut)?
4. Étendre ce résultat à la traduction de NK_0 dans LK_0 .

Exercice 3 *Traduction inverse*

1. Traduire les règles de LJ_0 dans NJ_0 .
2. Comment pourrait-on étendre ce résultat au cas classique? Quel outil utiliser?
3. Afin de raccourcir la preuve, faire directement une traduction de LK_0 dans NK_0 sans passer par LJ_0 .
Indication: Démontrer au préalable l'admissibilité de la règle $\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \text{DNE}$ dans NK_0 .