TD 9 : Calcul des séquents

jeanmarie.madiot@ens-lyon.fr

Voici les règles du calcul des séquents LK_0 (le « 0 » exprime qu'on ne s'intéresse qu'au fragment propositionnel).

Le groupe identité:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \text{Cut}$$

Le groupe structurel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ W_g \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ C_g \quad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ W_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ C_d \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ E_d$$

Le groupe logique:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g^1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g^2 \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_d^1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_d^2$$

$$\frac{\Gamma_1, B \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_d \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg_d$$

Exercice 1

Prouver les théorèmes suivants dans LK_0.

1. $\neg\neg P \to P$,
2. $((P \to Q) \to P) \to P$,
3. $(P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$,
4. $P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
5. $((P \vee Q) \to R) \to (P \to R) \wedge (Q \to R)$,
6. $(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R$.

Exercice 2 *Traduction de la déduction naturelle en calcul des séquents*

1. Rappeler les règles de la déduction naturelle propositionnelle intuitionniste.
2. Montrer que toute règle de NJ_0 est admissible dans LJ_0 + (Cut).
3. Comment supprimer la règle (Cut)?
4. Étendre ce résultat à la traduction de NK_0 dans LK_0.

Exercice 3 *Traduction inverse*

1. Traduire les règles de LJ_0 dans NJ_0.
2. Comment pourrait-on étendre ce résultat au cas classique? Quel outil utiliser?
3. Afin de raccourcir la preuve, faire directement une traduction de LK_0 dans NK_0 sans passer par LJ_0.
   Indication: Démontrer au préalable l'admissibilité de la règle $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\,\textsc{dne}$ dans NK_0.

Solutions

1

1.
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, P$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg\neg P \vdash P$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\neg P \to P$}
\end{prooftree}

2.
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P \vdash Q, P$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash P \to Q, P$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$(P \to Q) \to P \vdash P, P$}
\RightLabel{C_d}
\UnaryInfC{$(P \to Q) \to P \vdash P$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$}
\end{prooftree}

3.
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg Q, Q$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg\neg Q \vdash Q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$P \to \neg\neg Q, P \vdash Q$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$P \to \neg\neg Q \vdash P \to Q$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$P \to \neg\neg Q, \neg(P \to Q) \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$P \to \neg\neg Q \vdash \neg\neg(P \to Q)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$}
\end{prooftree}

4.
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$P, Q \vdash P \wedge Q$}
\RightLabel{$\vee_d^1$}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P, R \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P, R \vdash R$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$P, R \vdash P \wedge R$}
\RightLabel{$\vee_d^2$}
\UnaryInfC{$P, R \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$P, P, Q \vee R \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{C_g}
\UnaryInfC{$P, Q \vee R \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{$\wedge_g^2$}
\UnaryInfC{$P, P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{$\wedge_g^1$}
\UnaryInfC{$P \wedge (Q \vee R), P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{C_g}
\UnaryInfC{$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$}
\end{prooftree}

5.
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$R, P \vdash R$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$R \vdash P \to R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$R, Q \vdash R$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$R \vdash Q \to R$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$R \vdash (P \to R) \wedge (Q \to R)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$P \vdash P, R$}
\RightLabel{$\vee_d^1$}
\UnaryInfC{$P \vdash P \vee Q, R$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash P \vee Q, P \to R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$Q \vdash Q, R$}
\RightLabel{$\vee_d^2$}
\UnaryInfC{$Q \vdash P \vee Q, R$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash P \vee Q, Q \to R$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$\vdash P \vee Q, (P \to R) \wedge (Q \to R)$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$(P \vee Q) \to R \vdash (P \to R) \wedge (Q \to R), (P \to R) \wedge (Q \to R)$}
\RightLabel{C_d}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \to R \vdash (P \to R) \wedge (Q \to R)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash ((P \vee Q) \to R) \to (P \to R) \wedge (Q \to R)$}
\end{prooftree}

6.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R \vdash R}\text{Axiom} \quad \dfrac{}{Q \vdash Q}\text{Axiom}}{Q \to R, Q \vdash R}\to_g \quad \dfrac{}{P \vdash P}\text{Axiom}}{P \to Q \to R, Q, P \vdash R}\to_g \quad \dfrac{}{P \vdash P}\text{Axiom}}{P \to Q \to R, P \to Q, P, P \vdash R}\to_g}{P \to Q \to R, P \to Q, P \vdash R}C_g}{P \to Q \to R, P \to Q \vdash P \to R}\to_d}{P \to Q \to R \vdash (P \to Q) \to P \to R}\to_d}{\vdash (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R}\to_d$$

2

1.
$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{Axiom}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to\text{-intro} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to\text{-elim}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge\text{-intro} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge\text{-elim}_1 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge\text{-elim}_2$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee\text{-intro}_1 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee\text{-intro}_2 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee\text{-elim}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot\text{-elim}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{Weak} \qquad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\text{Contraction} \qquad \dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C}\text{Exchange}$$

2. Avec la restriction d'au plus une formule à droite, les contextes Δ des règles doivent presque toujours être vides (sauf dans W_g, C_g, $\vee_g$ et $\wedge_g$, ainsi que Δ_1 dans Cut et $\to_g$). Cela fait également disparaître les règles C_d et E_d. On remarque alors que la règle d'axiome, les règles structurelles et les règles d'introduction de NJ_0 sont respectivement la règle d'axiome, les règles structurelles à gauche et les règles d'introduction à droite de LJ_0.

   Pour les règles d'élimination, elles vont être transformées en règle gauche + coupure:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge\text{-elim}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{Axiom}}{A \wedge B \vdash A}\wedge_g^1 \quad \Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\text{Cut}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to\text{-elim} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\text{Axiom} \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}\to_g \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, \Gamma \vdash B}\text{Cut}}{\Gamma \vdash B}W_d$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee\text{-elim} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\vee_g \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma, \Gamma \vdash C}\text{Cut}}{\Gamma \vdash C}W_d$$

   Il ne reste alors que la règle d'élimination de $\bot$ qui est simplement W_d car la traduction de $\bot$ en calcul des séquents est le séquent vide.

3. Pour supprimer la règle (Cut), on utilise le théorème d'élimination des coupures (vu en cours).
4. Il suffit de traduire la règle du tiers exclu dans LK_0.

$$\dfrac{}{\vdash A \vee \neg A}\,\text{EM} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Axiom}}{\vdash \neg A, A}\,\neg_d}{\vdash A, \neg A}\,E_d}{\vdash A, A \vee \neg A}\,\vee_d^2}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,\vee_d^1}{\vdash A \vee \neg A}\,W_d$$

3

1. Vu que les règles sont les mêmes dans les deux systèmes, il n'y a rien à faire pour les cas suivants:
   - le groupe structurel (enfin, ce qui en reste..., c'est à dire les règles gauches et W_d lorsque Δ est vide),
   - la règle d'axiome,
   - les règles droites de $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$.

   La règle $\neg_d$ devient une introduction de $\rightarrow$ dans le cas particulier où $B = \bot$.

   Ne restent à traiter que les règles gauches et la règle de coupure. Sachant que Δ contient au plus une formule, sa traduction dans NJ_0 est ou bien l'unique formule qu'il contient (qu'on notera C), ou bien $\bot$ s'il est vide.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, B \vdash C}{\Gamma_1 \vdash B \rightarrow C}\,\rightarrow\text{-intro}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash B \rightarrow C}\,\text{Weak} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B}\,\text{Axiom} \quad \dfrac{\Gamma_2 \vdash A}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash A}\,\text{Weak}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash B}\,\rightarrow\text{-elim}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow B \vdash C}\,\rightarrow\text{-elim}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \vdash B \rightarrow C}\,\rightarrow\text{-intro}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B \rightarrow C}\,\rightarrow\text{-intro}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \rightarrow B \rightarrow C}\,\text{Weak} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Axiom}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A}\,\wedge\text{-elim}_1}{\Gamma, A \wedge B \vdash B \rightarrow C}\,\rightarrow\text{-elim} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Axiom}}{\Gamma, A \wedge B \vdash B}\,\wedge\text{-elim}_2}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,\rightarrow\text{-elim}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vee B \vdash A \vee B}\,\text{Axiom} \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \vee B, A \vdash C}\,\text{Weak} \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B, B \vdash C}\,\text{Weak}}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\,\vee\text{-elim}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\,\text{Axiom} \quad \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash A}\,\text{Weak}}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,\rightarrow\text{-elim}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, A \vdash C}{\Gamma_1 \vdash A \rightarrow C}\,\rightarrow\text{-intro}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \rightarrow C}\,\text{Weak} \quad \dfrac{\Gamma_2 \vdash A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A}\,\text{Weak}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C}\,\rightarrow\text{-elim}$$

2. Pour étendre ce résultat, la méthode la plus propre et la plus modulaire serait d'utiliser une traduction négative de LK_0 dans LJ_0 qu'on composerait ensuite avec la traduction de LJ_0 dans NJ_0. Il suffirait alors d'utiliser l'équivalence de $A^{\neg\neg}$ et A dans NK_0 pour conclure.

3. Dans NK_0, la règle DNE est admissible par

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \lor \neg A}\,\text{EM} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg A \vdash A}\,\text{ex falso}}{\Gamma \vdash A}\,\lor\text{-elim}$$

La première question à se poser est la traduction des séquents eux-mêmes: comment traduire $\Gamma \vdash \Delta$ pour n'avoir qu'une formula à droite? La réponse est de déplacer toutes les formules à gauche et de mettre $\bot$ à droite:

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$$

Ainsi on pourra déplacer à droite la formule de Δ sur laquelle on veut travailler (la formule principale) et on supprimera la double négation par la règle DNE.

Groupe identité:

- $\dfrac{}{\Gamma, A, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}\,\text{Axiom}^*$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, \neg A, \neg\Delta \vdash \neg A}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, \neg A, \neg\Delta \vdash A}\,\text{Axiom}}{\Gamma, A, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}\,\to\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma_1, A, \neg\Delta_1 \vdash \bot \qquad \Gamma_2, \neg A, \neg\Delta_2 \vdash \bot}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2 \vdash \bot}\,\text{Cut}^*$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, \neg A, \neg\Delta_2 \vdash \bot}{\Gamma_2, \neg\Delta_2 \vdash \neg\neg A}\,\to\text{-intro}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2 \vdash \neg A}\,\text{Weak} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, A, \neg\Delta_1 \vdash \bot}{\Gamma_1, \neg\Delta_1 \vdash \neg A}\,\to\text{-intro}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2 \vdash \neg A}\,\text{Weak}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2 \vdash}\,\to\text{-elim}$$

Groupe structurel: Comme toutes les formules passent à gauche, seules les règles structurelles gauches restent d'actualité et elles sont les même dans NK_0.

Groupe logique:

- $\dfrac{\Gamma, A, \neg B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg(A \to B), \neg\Delta \vdash \bot}\,\to_d^*$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \neg B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \neg\neg B}\,\to\text{-intro}}{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash B}\,\text{DNE}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A \to B}\,\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \to B) \vdash A \to B}\,\text{Weak}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \to B) \vdash \bot}\,\to\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma_1, B, \neg\Delta_1 \vdash \bot \qquad \Gamma_2, \neg A, \neg\Delta_2 \vdash \bot}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash \bot}\,\to_g^*$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, B, \neg\Delta_2 \vdash \bot}{\Gamma_2, \neg\Delta_2 \vdash \neg B}\to\text{-intro}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash \neg B}\text{Weak} \qquad \dfrac{\dfrac{}{SEQ(*)}\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \neg\Delta_1, \neg A \vdash \bot}{\Gamma_1, \neg\Delta_1 \vdash \neg\neg A}\to\text{-intro}}{\Gamma_1, \neg\Delta_1 \vdash A}\text{DNE}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash A}\text{Weak}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash B}\to\text{-elim}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash \bot}\to\text{-elim}$$

où $SEQ(*)$ est un raccourci pour $\Gamma_1, \Gamma_2, \neg\Delta_1, \neg\Delta_2, A \to B \vdash A \to B$

- $\dfrac{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot \qquad \Gamma, \neg B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg(A \wedge B), \neg\Delta \vdash \bot}\wedge_d^*$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \wedge B) \vdash \neg(A \wedge B)}\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg\neg A}\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A}\text{DNE} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg\neg B}\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash B}\text{DNE}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A \wedge B}\wedge\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \wedge B) \vdash A \wedge B}\text{Weak}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \wedge B) \vdash \bot}\to\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, A \wedge B, \neg\Delta \vdash \bot}(\wedge_g^1)^*$ (cas $(\wedge_g^2)^*$ symétrique)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg A}\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta, A \wedge B \vdash \neg A}\text{Weak} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, A \wedge B \vdash A \wedge B}\text{Axiom}}{\Gamma, \neg\Delta, A \wedge B \vdash A}\wedge\text{-elim}_1}{\Gamma, \neg\Delta, A \wedge B \vdash \bot}\to\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg(A \vee B), \neg\Delta \vdash \bot}(\vee_d^1)^*$ (cas $(\vee_d^2)^*$ symétrique)

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)}\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg\neg A}\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A}\text{DNE}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A \vee B}\vee\text{-intro}_1}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \vee B) \vdash A}\text{Weak}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg(A \vee B) \vdash \bot}\to\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot \qquad \Gamma, B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, A \vee B, \neg\Delta \vdash \bot}\vee_g^*$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, A \vee B \vdash A \vee B}\text{Axiom} \qquad \dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, A, \neg\Delta, A \vee B \vdash \bot}\text{Weak} \qquad \dfrac{\Gamma, B, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, B, \neg\Delta, A \vee B \vdash \bot}\text{Weak}}{\Gamma, \neg\Delta, A \vee B \vdash \bot}\vee\text{-elim}$$

- $\dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\neg A, \neg\Delta \vdash \bot}(\neg_d)^*$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\Delta, \neg\neg A \vdash \neg\neg A}\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg A}\to\text{-intro}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg\neg A \vdash \neg A}\text{Weak}}{\Gamma, \neg\Delta, \neg\neg A \vdash \bot}$$

- $\dfrac{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}{\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot}(\neg_g)^*$ cette règle disparaît dans la traduction